Unterrichtserfahrungen mit der Selbsttätigkeit der Schüler

Gottfried Obereder, Berndorf

Am Beginn des Vortrags wird allen Zuhörern ein Blatt gegeben, auf dem zwei Seiten aus einem Mathematikbuch kopiert sind, um zu zeigen, in welcher Form die Schüler selbständig arbeiten sollen. (Siehe Beilage)
Damit das Prinzip der Selbsttätigkeit an Ort und Stelle versucht wird, werden die Anwesenden nun aufgefordert, diesen Text durchzulesen und im Anschluß daran die folgenden Fragen auf der Rückseite des ausgeteilten Blattes zu beantworten:

Scheint Ihnen Selbsttätigkeit der Schüler (Durchlesen, Wichtiges unterstreichen, im Heft zusammenfassen) für dieses Kapitel angemessen?
□ nein □ vielleicht □ ja

Ich selbst wende die Methode der Selbsttätigkeit der Schüler an:
□ fast nie □ manchmal □ in jeder Stunde

In dieser Zeit beobachte ich die Kollegen bei ihrer Tätigkeit, um feststellen zu können, ob sie sich ähnlich wie Schüler verhalten (zuerst sehr ruhiges eigenständiges Lesen, dann allmählich paar- und gruppenweises Diskutieren).
Durch die Antworten auf die beiden Fragen möchte ich einen groben Überblick über die Einstellung der Zuhörer zum Prinzip der Selbsttätigkeit der Schüler bekommen, um die Schwerpunkte im Vortrag besser setzen zu können.

Nach diesem Einstieg wird eine kurze Übersicht der wichtigsten Punkte des Vortrags gegeben:

1) Bericht über den Unterrichtsverlauf des vorgestellten Kapitels

2) Allgemeine Überlegungen und weitere Erfahrungswerte

3) Ein Beispiel am TI-92

4) Allgemeine Überlegungen zu Algebrasystemen

5) Diskussion

Wie ist nun der Unterricht mit den Schülern abgelaufen? Die Schüler mußten als ersten Schritt den Text bis zur Nummer 5.03 durchlesen, das Wesentliche unterstreichen und ins Heft schreiben, danach die Nummer 5.02 ins Heft rechnen. Nach dem Besprechen dieses Teils war das Musterbeispiel 5.03 durchzuarbeiten. Es konnte im Unterricht nur mehr der Teil a) dieser Aufgabe gemeinsam besprochen werden, der Rest von 5.03 sowie Nummer 5.04 waren Hausübung. Raschere und begabte Schüler sollten Beispiel 5.05 behandeln (die Verallgemeinerung auf ein Zeitintervall der Länge h).
Für diese Tätigkeiten stand rund die Hälfte einer Unterrichtsstunde zur Verfügung.

Ein Schülerheft sollte nach dieser Stunde etwa folgendes Aussehen haben:

Wachstums- und Abnahmevorgänge

5.01 Anfangswert = 1000 4,5% Zuwachs je Stunde
Nach n Stunden: $A(n) = 1000 \cdot 1{,}45^n$

5.02 a) $A(10) \approx 41\,085 mm^2 \approx 4 dm^2$ b) $A(20) \approx 1\,687\,952 mm^2 \approx 1{,}7 m^2$

Insbesondere das Ergebnis von b) ist unrealistisch, da man einen derart großen Nährboden kaum zur Verfügung hat. Das heißt, daß die angegebene Formel nur für n kleiner 10 sinnvoll ist.

Der Verlauf von A(n) zwischen den errechneten Punkten ? (Abbildungen 5.2a,b,c auf Seite 117)

a) Das Stufenmodell ist unpassend, weil nicht anzunehmen ist, daß sich die Zellen nur jeweils genau nach einer Stunde teilen.

b) Das stückweise lineare Modell paßt besser, erfüllt aber die aus der Angabe zu entnehmende Forderung nicht, daß nämlich in gleichen Zeitintervallen gleiches prozentuelles Wachstum vorliegt. Rechnung: 1% von 1225 sind 12,25
Die Zunahme in der 2. halben Stunde ist 225, das sind 225 : 12,25 ≈ 18,4%.

c) Das glatte Modell $A(t) = 1000 \cdot 1{,}45^t$ erfüllt angeblich alle geforderten Bedingungen.

5.03 a) $A(0{,}5) = 1000 \cdot 1{,}45^{0{,}5} = 1000 \cdot \sqrt{1{,}45} \approx 1000 \cdot 1{,}204$ also ca. 20,4% Zunahme.

b) $A(0{,}5 + 0{,}5) = 1000 \cdot 1{,}45^{0{,}5+0{,}5} = 1000 \cdot 1{,}45^{0{,}5} \cdot 1{,}45^{0{,}5} = A(0{,}5) \cdot 1{,}45^{0{,}5} \approx$
$A(0{,}5) \cdot 1{,}204$ also 20,4% Zunahme .
.... usw.

Soweit der theoretische Idealfall. Die Wirklichkeit war natürlich nicht so perfekt. Wohl lasen alle Schüler konzentriert den Text im Buch (diese Minuten der vollkommenen Ruhe genieße ich als bereits älterer Lehrer besonders), übertrugen auch die wichtigsten Fakten ins Heft, wobei sich allmählich die Einzeltätigkeit in Partnerarbeit (Vergleich der Ergebnisse, ...) und auch Kleingruppenarbeit wandelte, was mich keineswegs störte.
Wie erwartet bereitete der Einstieg keine Probleme, da insbesondere von den Zinsrechnungen prozentuelle Zunahmen bekannt sind und auch noch in Erinnerung waren. Auch die Besprechung der drei Modelle für nicht ganzzahlige Zeitpunkte verlief durchaus zufriedenstellend. - Die Schüler erinnerten sich, daß Treppenfunktionen mitunter sinnvoll sind (Preisfunktionen), ich selbst erwähnte, daß man das stückweise lineare Modell durchaus verwendet, wenn kein besseres zur Verfügung steht
Zu echten Problemen kam es bei mehreren Schülern bei der Behandlung des Beispiels 5.03b). Noch dazu neigte sich die Stunde dem Ende zu, so daß ich nur mehr den Rat geben konnte, zuerst den Teil c) genau durchzuarbeiten und eventuell die Prozentsätze aus den numerischen Ergebnissen von A(0,5), A(1), ... zu berechnen. Der Erfolg war bescheiden:

mehrere Schüler konnten die Teile 5.03b) und 5.04b) nicht allein bewältigen, so daß ich 5.03b) in der folgenden Stunde an der Tafel teilweise vorrechnen mußte.

Diese Schwierigkeiten hebe ich deshalb besonders hervor, um zu dokumentieren, daß mit der Selbsttätigkeit der Schüler natürlich nicht alle Probleme plötzlich beseitigt sind, und die anderen Unterrichtsformen wie:

- der Lehrer rechnet an der Tafel
- das Lehrer - Klasse - Gespräch
- ein Schüler rechnet an der Tafel

überhaupt nicht mehr in Betracht gezogen werden sollen.

Ich persönlich allerdings habe es mir schon seit vielen Jahren zum Grundsatz gemacht, die Selbsttätigkeit der Schüler zu fördern, wann immer es möglich ist, weil ich gesehen habe, daß in dieser Organisationsform sehr große Vorteile liegen:

- jeder Schüler muß mitarbeiten
- die Schüler arbeiten gerne allein, weil es immer wieder Erfolgserlebnisse gibt
- jeder Schüler kann in seinem individuellen Tempo arbeiten
- wesentliche Vorgaben des Lehrplans werden erfüllt
- Begabte können leicht mit Zusatzaufgaben gefördert werden
- es kommt zu fließenden Übergängen in Richtung Partner- und Gruppenarbeit
- der selbständige Wissenserwerb wird gelernt
- und dadurch ein wesentlicher Punkt der Studierfähigkeit erreicht
- Einzelbetreuung durch den Lehrer oder gute Schüler ist möglich

Bei der praktischen Arbeit ergeben sich natürlich viele Varianten wie: Unterbrechungen, um Antworten auf Fragen oder Klarstellungen zum Text geben zu können, günstiger scheint es mir aber, wichtige Schritte und Ergebnisse auf die Tafel zu schreiben und auf Schwierigkeiten einzelner individuell einzugehen, solange nicht zu viele Schüler Hilfe brauchen. - Dies ist natürlich wieder davon abhängig, ob die Aufgabenstellung in ihrem Schwierigkeitsgrad richtig gewählt wurde.
Zu ergänzen wäre noch, daß Beispiele, wie das hier behandelte, von mir durchaus auch als Hausübung gegeben und von den Schülern gut bewältigt werden. (Stehende Redewendung dabei ist: Text langsam lesen - Text nochmals lesen und das Wichtige unterstreichen - eine Zusammenfassung ins Heft schreiben - lernen - aber auch Bemerkungen, Fragen dazuschreiben) - Natürlich müssen diese Hausübungen genau besprochen werden, damit Ergänzungen vorgenommen, Fragen beantwortet und zusätzliche Bemerkungen angebracht werden können. Dies alles zusammen ist dann ein wesentlicher Punkt der Mitarbeit und wird entsprechend gewichtet.

Selbstverständlich müssen die Schüler an dieses Arbeiten behutsam herangeführt werden. Ich beginne damit bereits in der ersten Klasse und merke zu meiner Freude, daß nun auch schon in anderen Gegenständen auf diesem Gebiet immer mehr geschieht.

Wichtig bei diesem Vorhaben ist natürlich auch ein Buch, das diese Arbeitsweise fördert, also leicht verständlich geschrieben ist, möglichst wenige Fachausdrücke verwendet, einführende Beispiele mit zumindest teilweisem Lösungsweg bietet und als Gesamtes vom Lehrer und von den Schülern akzeptiert wird, weil auf weiten Strecken den Ausführungen des Buches sehr genau gefolgt wird, was übrigens auch für das Nachlernen versäumten Stoffes sehr förderlich ist.

Als Zusammenfassung des bisher Gesagten und als Übergang zum nächsten Teil Algebrasysteme, möchte ich einige Stellen des Lehrplans zitieren, um zu zeigen, daß hier durchaus Übereinstimmung vorliegt.

So findet man unter den Bildungs- und Lehraufgaben unter anderem: Die Schüler sollen ... mit der Verwendung mathematischer Texte und Arbeitsmittel, insbesondere elektronischer Rechengeräte, vertraut werden.
Die Schüler sollen befähigt werden, ...

- Informationsquellen sachgerecht zu nutzen
- selbständig Wissen zu erwerben
- sowohl selbständig als auch kooperativ zu arbeiten ....

Weiters sind in den Didaktischen Grundsätzen alle von mir erwähnten Sozialformen des Unterrichts aufgezählt, allerdings ohne Gewichtung. Hinzugefügt ist noch der Satz: Im Rahmen der verschiedenen Sozialformen sollen die Schüler auch planmäßig dazu angeleitet werden, Texte und sonstige Informationen für ihre Arbeit zu verwenden.
Als Übergang zum nächsten Teil meiner Ausführungen sei noch zitiert: Die Wahl dieser Arbeitsmittel (z. B. Taschenrechner, auch programmierbare, Personalcomputer) obliegt dem Lehrer.
Damit ist sichergestellt, daß es erlaubt ist, derartige Geräte im Mathematikunterricht zu verwenden, und damit auch Computeralgebrasysteme. Ich habe in den letzten vier Jahren auf diesem Gebiet mit drei verschiedenen Systemen gearbeitet und möchte darüber kurz berichten.
Am Anfang stand der Taschenrechner HP-95, der DERIVE verwenden konnte. Es erhielten im gymnasialen Teil einer typengemischten Klasse jeder der 9 Schüler im Rahmen eines Projektes des Ministeriums diesen Rechner kostenlos zur Verfügung (Projekt von LSI Hofrat Heugl). Da die Schüler fast keine EDV-Erfahrungen hatten, war das Einarbeiten in das Programm etwas zeitaufwendig, doch insgesamt war der Einsatz von DERIVE ein Gewinn, zumal der Rechner auch in Physik eifrig verwendet wurde. Die Nachteile dieser Konfiguration waren allerdings beachtlich: sehr langsamer Prozessor, sehr stromintensiv, daher ohne Netzgerät fast nicht betreibbar, zu kleines Display, zu hoher Preis (≈ 10 000,- S). Damit war sehr bald klar, daß der HP-95 nur eine vorläufige Notlösung sein konnte.
Mein nächster Versuch erfolgte mit einer Realgymnasiumklasse, in der der Großteil der Schüler zu Hause einen PC haben, während den anderen ein HP-95 von der Schule geliehen wurde. Hier lag das größte Problem bei der Organisation der Schularbeiten: In der 7. Klasse wurde in zwei Gruppen hintereinander gearbeitet, heuer in der 8. Klasse sind zum Glück nur noch 15 Schüler vorhanden, so daß im großen EDV-Raum alle gleichzeitig arbeiten können. Interessant ist, daß eine Schülerin, die erst in der 8. Klasse zu uns gestoßen ist, nun vor der Reifeprüfung auch bereits mit DERIVE ausreichend gut zurecht kommt, obwohl sie natürlich am Beginn des Schuljahres große Probleme hatte. Dennoch würde ich diese Konstellation nicht ein zweites Mal wählen, der organisatorische Aufwand ist einfach zu groß.
Die derzeit optimale Lösung auf diesem Gebiet gibt es seit Dezember 1995, als der Taschencomputer TI-92 in Österreich auf den Markt kam. Eine 6. Klasse bestellte einen Klassensatz zum Sonderpreis von S 1900,-. Dies war kein Problem, da ich am Beginn der 5. Klasse kei-

nen neuenTaschenrechner für die Oberstufe eingeführt hatte, in Erwartung eines derartigen Gerätes.
Eine Kurzcharakteristik: Der TI-92 ist für ein neues Produkt erstaunlich ausgereift, es treten kaum Störungen auf, bisher war nur ein Gerät defekt und wurde sofort ausgetauscht, große Teile von DERIVE sind eingebunden, einiges ist besser gelöst als in DERIVE, nur weniges geht mir ab, die Rechengeschwindigkeit ist ausreichend, der Stromverbrauch durchaus akzeptabel, das Display für Schüler kein Problem, wohl aber für den einen oder anderen Lehrer, dafür gibt es ein Overheaddisplay, das für den Unterricht äußest angenehm ist, für private Zwecke allerdings etwas kostspielig (≈ 5000,- S einschließlich modifiziertem Rechner), sollte der Preis für Schüler unter S 2000,- bleiben, scheint er mir durchaus angemessen.

Nun aber zu den Aktivitäten der Schüler am TI-92. Um an das vorherige Beispiel anzuknüpfen, habe ich aus demselben Kapitel ein diskretes Modell für Wachstum bei Beschränkung ausgewählt:
K ist dabei die größtmögliche Individuenzahl,
N(n) die Individuenanzahl zum Zeitpunkt n.

Wir nehmen an, daß die relative Änderung $\frac{N(n+1) - N(n)}{N(n)}$ proportional ist zu K - N(n):

$$\frac{N(n+1) - N(n)}{N(n)} = C \cdot (K - N(n)) = C \cdot K \cdot \left(1 - \frac{N(n)}{K}\right)$$ Man setzt für C·K=r

$$\frac{N(n+1) - N(n)}{N(n)} = r \cdot \left(1 - \frac{N(n)}{K}\right)$$ Daraus berechnet man N(n+1) und erhält:

$$\boxed{N(n+1) = N(n) \cdot \left(1 + r \cdot \left(1 - \frac{N(n)}{K}\right)\right)}$$

Hier ist anzumerken, daß bei obigen Umformungen der Rechner keine große Hilfe ist, da das Lösen von Gleichungen nur nach Variablen und nicht nach Funktionen möglich ist.

Die Aufgabenstellungen im Buch sind nun die folgenden: Berechne N(1), N(2), ..., N(10) für K=10 000 r=1,2 N(0)=100
In weiterer Folge: Untersuche das Verhalten für verschiedene Werte von N(0), K und r mit einem Computer.
Hier zeigen sich nun die Stärken des Rechners: Man kann den GRAPH-MODE auf SEQUENCE stellen, so daß einerseits im Graphikfenster die Folge als solche dargestellt wird, und andererseits im Funktionseingabefenster die Folge rekursiv definiert werden kann, wobei sogar Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Folgen möglich sind, was etwa bei Räuber-Beute-Modellen sehr vorteilhaft ist.
Damit steht nach der Eingabe obiger Formel, der Parameter N(0), K, r und sinnvoller Berei-

che für beide Achsen sofort Graph und Tabelle zur Verfügung.
Einem Erforschen dieser Folge für verschiedene Parameter, insbesondere größerer Werte für r, steht nun nichts mehr im Wege. Die Schüler erkennen mit großer Begeisterung die Vielfalt der Möglichkeiten, z. B. Zweierperiode für r=2,25 - Viererperiode für r=2,5 - Achterperiode für r=2,55 - liegt bei r=2,8 schon chaotisches Verhalten vor? Hier spielt auch die Wahl von N(0) eine entscheidende Rolle: für N(0)=100 erkennt man noch eine gewisse Regelmäßigkeit, für N(0)=99 herrscht vermutlich schon Chaos - Wie wirken sich die Rundungsfehler des Rechners auf die Art des Ergebnisses aus - stellt sich Regelmäßigkeit vielleicht erst für sehr großes n ein, oder vielleicht nur wegen der Rundungsfehler, oder gerade wegen der Rundungsfehler nicht, ... ?
Wieder zeigen sich einerseits die Möglichkeiten des Rechners sehr schön, aber auch die Grenzen, wenn es um exakte oder allgemeine Aussagen geht.
Jedenfalls hatten eigentlich alle Schüler eine Fülle von AHA-Erlebnissen, empfanden Mathematik wieder einmal spannend und voller Überraschungen. Zu Hause **durften** alle nach eigenem Gutdünken weiterforschen. - Sicher werden Sie sagen, daß dies natürlich ein Paradebeispiel für den Rechnereinsatz ist. - Das ist schon richtig, aber bisher war es nicht möglich, auf so einfache und rasche Art **allen Schülern** diese Möglichkeiten zu bieten
Ähnlich gute Erfolge beim Begreifen der Zusammenhänge ergaben sich durch die einfache Bedienung des Gerätes auch bei der Monotonie und beim Grenzwert von Folgen, wo das Visualisieren und Rechnen vieler Beispiele eine große Hilfe sind. Auch hier muß immer wieder auf die Notwendigkeit allgemeiner Überlegungen hingewiesen werden: Zeige ich auch an noch so vielen Beispielen mit unterschiedlichem ε, daß fast alle Elemente einer Folge in der jeweils vorgegebenen ε-Umgebung liegen, so ist das noch immer kein Beweis dafür, daß dies für alle ε-Umgebungen gilt, was die Schüler auch ohne weiteres akzeptieren.
Ein interessanter Rechenfehler des TI-92: Es liegt eine Halbwertszeit von 5760 Jahren vor. Nach wievielen Jahren sind nur noch 10% des ursprünglichen Stoffes vorhanden?
Die Gleichung $N0 \cdot a^{5760} = 0,5 \cdot N0$ Löst der Rechner noch richtig nach a ≈ 0,99988
Die Gleichung $N0 \cdot a^{x} = 0,1 \cdot N0$ wird mit der falschen Antwort x=∞ erledigt, während mittels Logarithmen das richtige Ergebnis errechnet wird: $\frac{\ln 0,1}{\ln a} \approx 19\,134$

Stärken und Schwächen des TI-92 bzw. von DERIVE

- Visualisierungen sind einfach und rasch zu erstellen
- realistischere und mehr Beispiele werden möglich
- Versuche und Varianten können durchgeführt werden
- Voreinstellungen sind oft wesentlich für die Lösbarkeit eines Problems
- eine brauchbare Lösungsstrategie muß oft entwickelt werden
- Rundungsfehler führen mitunter zu falschen oder keinen Ergebnissen
- eine sorgfältige Dokumentation ist notwendig
- das Lernen der Bedienung erfordert meist mehr Zeit als geplant

Abschließend möchte ich noch zu bedenken geben, daß sich durch den Einsatz derartiger Rechengeräte doch sicher einiges im Mathematikunterricht ändern wird, manches vielleicht in eine unerwünschte Richtung. Kritisch eingestellte Leute könnten es auf eine kurze Formel bringen: Numerisch rechnen können die Schüler seit der Einführung des Taschenrechners

nicht mehr, nun verlernen sie auch noch die Algebra. - Was bleibt denn dann noch von der Mathematik über?
Die letzte Frage ist leicht zu beantworten: Das Verstehen mathematischer Texte, das Übersetzen in ein mathematisches Modell, das Suchen einer brauchbaren Lösungsstrategie, das Interpretieren der Lösung, innermathematische Probleme: Beweisen, Begründen, Vermuten, Widerlegen, Argumentieren, ...
Die vorherige Frage ist nicht so einfach zu beantworten und ich möchte daher nur zwei Gedanken dazu äußern: Erstens hat sich ab der Verwendung des Taschenrechners nicht gar so viel im Mathematikunterricht geändert, und soweit ich es bisher verfolgen kann, ändert sich auch nicht allzuviel mit der Einführung algebratauglicher Systeme, aber es hat sich etwas geändert, und es wird natürlich der oben beschriebene Effekt auftreten. Somit ist zu überlegen, wie weit und wodurch er in sinnvollen Grenzen zu halten ist, und wo diese Grenzen sind. Als ein Gegenmittel rechne ich nicht alle Beispiele in der Schule zu Ende, sondern lasse Ergebnisse abschätzen, außerdem verlange ich nicht immer, daß der Rechner mitgenommen werden muß, weiters habe ich zum Üben des Kopfrechnens und zum Abschätzen von Ergebnissen Rechenblätter erstellt, die ich regelmäßig mit den Schülern durcharbeite, indem ich eine entsprechende Folie auflege und die Ergebnisse ins Heft schreiben lasse. Nachher wird verglichen. Nun bin ich dabei, diese Rechenblätter entsprechend auszubauen. Ein Beispiel dazu:

$9 \cdot 7 =$ $\quad$ $100:5 =$ $\quad$ $1000^2 =$ $\quad$ $50:\frac{1}{2} =$

$\left(\frac{2a}{b}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(\frac{n^2}{3w}\right)^3 =$ $\quad$ $(x - y)^2 =$

$\frac{a + c}{b} = d \quad a = ?$ $\quad$ $5\,593 \cdot 6526 \approx$ $\quad$ $KO + KO \cdot \frac{p}{100} =$

5 Wachstums- und Abnahmevorgänge

5.1 Exponentialfunktionen

Viele Vorgänge in der Natur verlaufen so, daß sie – näherungsweise – durch sogenannte Exponentialfunktionen beschrieben werden können.

5.01 Ein Biologe beobachtet, daß der Inhalt der Fläche, die eine Zellkultur auf einer Nährlösung einnimmt, sich in jeder Stunde um ca. 45 % vergrößert. Berechne den Inhalt dieser Fläche nach 1, 2, 3, 5, n Stunden, wenn die Kultur zu Beginn der Beobachtung 1000 mm² einnimmt! (Wir setzen dabei voraus, daß der Nährboden hinreichend groß ist.)

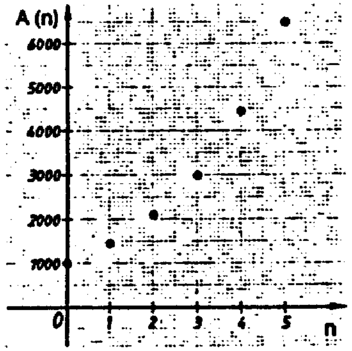

Fig. 5.1

Lösung:

Wird eine Größe A um 45 % vermehrt, so wächst sie auf folgenden Betrag an:

$A + 45\,\%$ von $A = A + 0{,}45 \cdot A = 1{,}45 \cdot A$

(Vgl. MATHEMATIK OBERSTUFE 1, Seite 7, 8.)

Wenn man den Flächeninhalt nach 1, 2, …, n Stunden mit A (1), A (2), …, A (n) bezeichnet, so erhält man:

$A(1) = 1000 \cdot 1{,}45 = 1450$
$A(2) = A(1) \cdot 1{,}45 = (1000 \cdot 1{,}45) \cdot 1{,}45 = 1000 \cdot 1{,}45^2 \approx 2100$
$A(3) = A(2) \cdot 1{,}45 = 1000 \cdot 1{,}45^2 \cdot 1{,}45 = 1000 \cdot 1{,}45^3 \approx 3050$
$A(5) = 1000 \cdot 1{,}45^5 \approx 6400$
$\underline{A(n) = 1000 \cdot 1{,}45^n}$

5.02 (Fortsetzung von 5.01) Berechne den Flächeninhalt A(n) für a) $n = 10$, b) $n = 20$! Wie realistisch sind diese Ergebnisse?

Wie groß ist der Flächeninhalt nach einer halben Stunde? Allgemein: Welche Werte nimmt der Flächeninhalt A (n) für nichtganzzahlige Zeitpunkte n an? Das heißt, wie verläuft die Wachstumskurve zwischen den in Fig. 5.1 gezeichneten Punkten?

Als Antwort auf diese Frage bieten sich drei Modelle an:

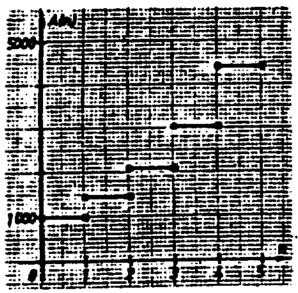

Fig. 5.2 a
Stufenmodell

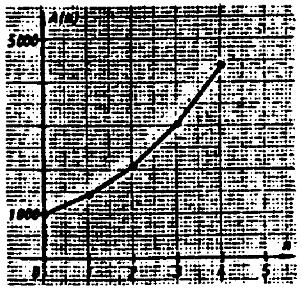

Fig. 5.2 b
stückweise lineares Modell"

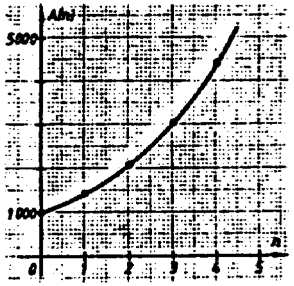

Fig. 5.2 c
glattes Modell"

Welches Modell den gegebenen Wachstumsprozeß am besten beschreibt, kann nicht von vornherein gesagt werden. Eine Antwort auf diese Frage könnte man etwa durch weitere Messungen ermitteln.

Wenn man von der Annahme ausgeht, daß sich alle Zellen immer genau zu demselben Zeitpunkt teilen, so wäre das Stufenmodell ein geeignetes Modell (zumindest für die *Anzahl* der Zellen). Da aber ein solches Verhalten in der Praxis nicht beobachtet wird, ist das Stufenmodell nicht passend.

Dem stückweise linearen Modell liegt der Gedanke zugrunde, daß zwischen zwei ganzzahligen Zeitpunkten das Wachstum linear verläuft. Wenn nach einer Stunde der Flächeninhalt von $A(0) = 1000\,mm^2$ auf $A(1) = 1450\,mm^2$ anwächst, so müßte er bei linearem Wachstum nach einer halben Stunde

$$A(0{,}5) = 1000 + 0{,}5 \cdot 450 = 1225\,mm^2$$

betragen. Dies entspricht einem Wachstum von 22,5 %. In der zweiten halben Stunde wäre der Flächeninhalt von 1225 mm² auf 1450 mm² angewachsen, was einem Wachstum um ca. 18,4 % entspricht. (Rechne nach!) Laut Angabe wächst der Flächeninhalt in *jeder* Stunde um den gleichen Prozentsatz. Es ist daher nicht plausibel, daß die Prozentsätze in zwei aufeinanderfolgenden halben Stunden verschieden groß sind. Somit scheidet auch das stückweise lineare Modell aus.

Das glatte Modell ergibt sich daraus, daß die Formel $A(t) = 1000 \cdot 1{,}45^t$ auch für nicht ganzzahlige $t \in \mathbb{R}_0^+$ angewandt wird. Wir werden in den folgenden Aufgaben zeigen, daß nach diesem Modell der Flächeninhalt in gleich langen Zeitintervallen um den gleichen Prozentsatz wächst.

5.03 a) Berechne aus $A(t) = 1000 \cdot 1{,}45^t$, um welchen Prozentsatz der Flächeninhalt in der ersten halben Stunde zunimmt!

b) Zeige, daß auch in der 2., 3., 5. halben Stunde der Inhalt der Fläche um diesen Prozentsatz wächst!

c) Zeige, daß in jeder beliebigen halben Stunde der Inhalt der Fläche um diesen Prozentsatz wächst!

Lösung von a und c:

a) $A(0{,}5) = 1000 \cdot 1{,}45^{0{,}5} = 1000 \cdot \sqrt{1{,}45} \approx 1000 \cdot 1{,}204$

Der Flächeninhalt wächst also in der ersten halben Stunde um <u>ca. 20 %</u>.

c) $A(t) = 1000 \cdot 1{,}45^t$
$A(t + 0{,}5) = 1000 \cdot 1{,}45^{t+0{,}5} = 1000 \cdot 1{,}45^t \cdot 1{,}45^{0{,}5} =$
$= A(t) \cdot 1{,}45^{0{,}5} \approx A(t) \cdot 1{,}204$

Der Flächeninhalt wächst also in *jeder* halben Stunde um <u>ca. 20 %</u>.

5.04 (Fortsetzung von 5.03)

a) Um wieviel Prozent wächst der Flächeninhalt laut glattem Modell in der ersten Viertelstunde?

b) Zeige, daß der Flächeninhalt in jeder Viertelstunde um denselben Prozentsatz wächst!